Teil 2

Optionspreismodelle und das Binomialmodell nach Cox, Ross & Rubinstein

erstellt am
Fachhochschul-Studiengang
Controlling, Rechnungswesen und Finanzmanagement
FH OÖ, Standort Steyr

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis / Glossar

CBOE	Chicago Board Options Exchange
OTC	Over the counter
EUREX	European Stock Exchange
OCC	Option Clearing Coporation
ITM	In-the-Money
ATM	At-the-Money
OTM	Out-of-the-Money
IV	Implizite Volatilität
LIBOR	London Interbank Offered Rate
c.p.	ceteris paribus
p.a.	per annum
CCP	Central Counter Party
UGB	Unternehmensgesetzbuch
GuV	Gewinn und Verlustrechnung
ISE	International Securities Exchange
EUREX	European Exchange
EUWAX	European Warrant Exchange
WBAG	Wiener Börse Aktien Gesellschaft
ATX	Austrian Traded Index
CME	Chicago Mercantile Exchange

1 Optionspreismodelle

Im modernen Optionshandel erfolgt das Pricing mit Hilfe modernster IT gestützter Technologien, doch nach wie vor basieren die eingesetzten Algorithmen auf einigen altgedienten Optionspreismodellen. Gerade für professionell agierende Marktteilnehmer ist es wichtig trotz der heute zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel zumindest die Grundpfeiler der zugrundeliegenden Modelle zu kennen und zu verstehen. Dies ist vergleichbar mit dem Steuern eines PKWs, denn dafür reicht das bloße erlangen des Führerscheins. Von einem professionellen Rennfahrer hingegen wird neben praktischen Fähigkeiten durchaus auch technisches Verständnis für die Funktionsweise seines Boliden erwartet.[1]

Optionspreismodelle haben vor allem die Aufgabe den „fairen Wert“ der Option zu ermitteln. Darüber hinaus dienen sie als Grundlage zur Berechnung der IV unter Anwendung eines Annäherungsverfahrens und liefern auch die Sensitivitätskennzahlen, welche uns bereits als Griechen bekannt sind.[2]

Nach Labuszewski ist der faire Wert einer Option „der Preis, zu dem sowohl Käufer wie auch Verkäufer statistisch gesehen, über eine ausreichend große Anzahl an Versuchen, ein Break-even-Geschäft erwarten kann.“ Mit anderen Worten könnte man auch sagen, dass der faire Wert jenem Betrag entspricht, welcher bei einer ausreichend großen Anzahl an Versuchen, unter weitgehend konstanten Bedingungen ein Nullsummenspiel ergibt.[3]

Eine der ersten Arbeiten die sich mit dem Handel von Optionen auseinandersetzte war „The Theory of Options in Stocks and Shares“, die Arbeit wurde 1877 von Charls Castelli in London publiziert. Bereits damals beschrieb Castelli Strategien welche heute als Covered-Write und Straddle bekannt sind. Im Jahr 1900 setzte Louis Bachelier in seinem Werk „The Theory of Speculation“ erstmals höhere Mathematik zur Optionsbewertung ein.[4] Im mathematischen Sinn waren seine Modelle bereits Wiener Prozesse, welche erst fünf Jahre später von Albert Einstein erforscht und publiziert wurden.[5] Der große Durchbruch in der Modellierung von Optionspreisen gelang im Jahr 1973 Fischer Black (University of Chicago) und Myron Scholes (Massachusetts Institute of Technology) mit ihrem auf den Arbeiten von Bachelier und weiteren Wissenschaftern basierendem Werk „The Pricing of Options ans Corporate Liabilities“.[6] Das Black-Scholes Modell wurde über die Jahre immer wieder überarbeitet und für spezielle Anwendungen abgeleitet, stellt aber bis heute ein grundlegendes

[1] Vgl. Fend, 2017, S. 105
[2] Vgl. ebenda, S. 105
[3] Vgl. Labuszewski/Sinquefield, 1985, 5ff
[4] Vgl. Natenberg, 2015, 61f
[5] Vgl. Fend, 2017, S. 105
[6] Vgl. Black/Scholes, 1973

Element der Bewertung speziell für europäische Optionen dar.[7] Der Durchbruch zur Bewertung amerikanischer Optionen gelang John C. Cox, Stephan Ross und Mark Rubinstein im Jahr 1979 mit ihrem Werk „Option Pricing: A simplified approach“. Dieses Werk basiert wiederum auf den Annahmen des Black-Scholes-Modells.[8] Das Modell wird heute in der Regel als CRR-Modell bezeichnet. In den folgenden Jahren wurde noch eine Reihe weiterer Modelle entwickelt. In diesem Zusammenhang sind besonders die Arbeiten von Bjerksund und Stensland zu nennen, welchen es gelang das Black-Scholes-Modell auf amerikanische Optionen ohne Dividendenausschüttung zu erweitern, sowie Leisen und Reimer, die das CRR-Modell derart überarbeiteten, dass die Umsetzung ihres Modells in einem modernen Algorithmus die Rechenzeit speziell für komplexe Modelle erheblich reduziert, ohne dabei einen Qualitätsverlust in Kauf nehmen zu müssen.[9] Sowohl das Black-Scholes-Modell wie auch das CRR-Modell haben Stärken und Schwächen, daher reicht es nicht aus sein favorisiertes Modell zu wählen, vielmehr sollte das richtige Modell für die jeweilige Anwendung ausgewählt werden. Die folgende Tabelle bietet einen Überblick über die Stärken und Schwächen der jeweiligen Modelle:

	Funktionsanforderung an das Optionspreismodell	**Black-Scholes-Modell**	**CRR- Modell**
1	Performanceindex - europäische Indexoptionen (Put und Call)	✓	✓
2	Kursindex - europäische Indexoptionen (Put und Call)	✓	✓
3	Aktienoptionen - europäischer Call ohne Dividende	✓	✓
4	Aktienoptionen - europäischer Call mit Dividende	✓	✓
5	Aktienoptionen - amerikanischer Call ohne Dividende	✓	✓
6	Aktienoptionen - amerikanischer Call mit Dividende	✗	✓
7	Aktienoptionen - europäischer Put ohne Dividende	✓	✓
8	Aktienoptionen - europäischer Put mit Dividende	✓	✓
9	Aktienoptionen - amerikanischer Put ohne Dividende	✗	✓
10	Aktienoptionen - amerikanischer Put mit Dividende	✗	✓
11	Geschwindigkeit der Algorithmen	schnell	langsam
12	Genauigkeit	sehr präzise	situationsabhängig (genügend)

Tabelle 1: Gegenüberstellung Black-Scholes-Modell und CRR-Modell[10]

Anhand von Tabelle 4 sind die Stärken des Black-Scholes-Modells gut erkennbar. Es punktet durch die Geschwindigkeit, mit der ein Algorithmus die Daten verarbeiten kann und

[7] Vgl. Natenberg, 2015, S. 62
[8] Vgl. Cox/Ross/Rubinstein, 1979
[9] Vgl. Fend, 2017, S. 106
[10] Erstellt nach Fend, 2017, S. 107

durch seine Genauigkeit. Der große Nachteil besteht darin, dass der Großteil der amerikanischen Optionen nicht verarbeitet werden kann.[11]

Um eine Vergleichbarkeit der Geschwindigkeit darstellen zu können gilt es eine Annahme bezüglich der Steps des CRR-Modells zu treffen. Diese Annahme ist sowohl für die Geschwindigkeit wie auch die Genauigkeit des Modells entscheidend. Je mehr Steps gewählt werden, desto präziser wird das Ergebnis, jedoch erhöht sich die Rechenzeit in etwa zum Quadrat zur Stepanzahl. Bei angenommenen 50 Steps (was in der Praxis einen guten Kompromiss darstellt) ist das CRR-Modell um den Faktor 300-500 langsamer als das Black-Scholes-Modell. Gerade wenn eine sehr große Anzahl von Optionen in kurzer Zeit mit einem CRR-Modell zu berechnen sind, kann dies zu Systemengpässen führen.[12]

1.1 Das Cox, Ross und Rubinstein – Binomialmodell

Die Grundlage des CRR-Modells besteht in der Annahme, dass ein Aktienkurs in jeder Zeitperiode (Step) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit steigt oder fällt. Diese Annahme wird als Random Walk bezeichnet. Die zweite Grundannahme des Modells beruht auf dem „No-Arbitrage-Argument“[13], was besagt, dass aus einer Aktie und einer Option ein risikoloses Portfolio gebildet werden kann, welches zumindest den risikolosen Zins verdienen muss.[14]
Da die Höhe der Optionsprämie von der Kursentwicklung des Underlyings abhängt, ist es nötig die historische Verteilung der Renditen des Underlyings zu kennen um daraus die Wahrscheinlichkeit für höhere oder tiefere Kurse in einem Zeitintervall abzuleiten. Die Länge eines solchen Zeitintervalls wird in der Praxis als Step bezeichnet. Hat eine Option eine Restlaufzeit von 120 Tagen und man entscheidet sich die Berechnung mit 40 Steps durchzuführen, entspricht ein Step drei Tagen. Mit Hilfe der historischen Volatilität lässt sich nun für diese drei Tage berechnen wie weit sich der Kurs von seinem Startwert im Durchschnitt entfernen wird. Ohne zu wissen ob sich der Kurs im Zeitintervall nach oben oder unten bewegt kann somit ein unteres Kursziel (Downstep) und oberes Kursziel (Upstep) definiert werden.[15]
Angenommen das Underlying ist eine Aktie, welche derzeit € 50 wert ist und wir rechnen mit einer Kursbewegung von € 2, dann könnte der Kurs der Aktie nach einem Step € 52 oder € 48 betragen. Dieses Beispiel vereint bereits die Eckpfeiler des Binomialmodells in sich und unterliegt folgenden Annahmen:

- Die Zeitintervalle in denen das Underlying gehandelt wird sind immer gleich lang (diskret verteilt)

[11] Vgl. Fend, 2017, S. 107
[12] Vgl. ebenda, S. 107
[13] Hull, 2015, S. 350
[14] Vgl. Hull, 2015, S. 350
[15] Vgl. Fend, 2017, S. 108

- Im Zeitintervall bewegt sich das Underlying immer um einen fixen Betrag nach oben oder unten. Während die Aufwärtsbewegungen als Upstep (u) bezeichnet werden, spricht man bei den Abwärtsbewegungen vom Downstep (d).
- Es besteht über alle Steps hinweg die Annahme, dass die Volatilität konstant bleibt. Somit bleibt auch die Gewinnwahrscheinlichkeit konstant. Die Wahrscheinlichkeit wird mit p beschrieben.[16]

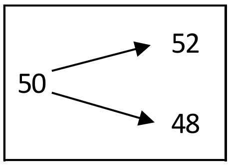

Abbildung 1: Einperiodiges Binomialmodell[17]

Nun kennen wir sowohl die obere wie auch die untere Kursmarke. Im nächsten Schritt berechnen wir den Kurs der Option zu Ende der Laufzeit. Wie wir bereits wissen besteht die Optionsprämie zum Ende der Laufzeit ausschließlich aus ihrem inneren Wert. Dieser entspricht entweder der Differenz zwischen Strike und Kurs des Underlyings, wenn die Option im Geld ist, oder die Option verfällt wertlos mit einem inneren Wert von Null. Daher lässt sich der Preis wie folgt darstellen:[18]

$$C = Max(0, S_T - K)$$
$$P = Max(0, K - S_T)$$

In dieser Betrachtung steht S_T für den Kurs den Underlyings und K für den Strike. Basierend auf die beschriebene Vorgehensweise kennen wir nun den Wert der Option zum Laufzeitende. Ziel der Berechnung ist jedoch den aktuellen Wert zu erhalten. Hierfür rufen wir uns noch einmal die Ausgangssituation unseres Beispiels ins Gedächtnis. Wir haben einen Kurs des Underlyings von € 50 und erwarten mit 50%iger Wahrscheinlichkeit einen Anstieg um € 2 oder einen Rückgang um € 2. Zur weiteren Berechnung gilt es die Daten der Option zu definieren. Wir berechnen einen europäischen Call mit einem Strike von € 50. Zur Vereinfachung verzichten wir auf die Berücksichtigung von Laufzeit, Volatilität und Zinsen. Aus diesen Daten ergibt sich folgende Formel:

$$C = 0{,}5\, x\, max\, (0, S_o - K) + 0{,}5\, x\, max\, (0, S_u - K)$$
$$C = 0{,}5\, x\, (52 - 50) + 0{,}5\, x\, 0$$
$$C = 1$$

[16] Vgl. Fend, 2017, S. 109
[17] Erstellt nach Fend, 2017, S. 109
[18] Vgl. Fend, 2017, S. 110

Für dieses einperiodige Binomialmodell errechnet sich somit eine Prämie für den Call von € 1. Wie bereits erwähnt handelt es sich hier um eine strak vereinfachte Darstellung. In der Praxis werden ausschließlich mehrdimensionale Binomialmodelle eingesetzt.[19] Die Lösung eins mehrdimensionalen Binomialmodells wird in Tutorial 1 vorgeführt. In diesem Tutorial wird folgende Option bewertet:

Markt-Typ:	Indexoption
Optionstyp:	Call
Ausübungsrecht:	Europäisch
Kurs des Underlyings:	1000
Strike:	970
Zinsen:	6% p.a.
Restlaufzeit:	92 Tage
Steps:	4

Für die Lösung dieses Beispiels folgen Sie bitte folgendem QR-Code:

https://youtu.be/N51DldMZSRI

[19] Vgl. Fend, 2017, S. 110

2 Literaturverzeichnis

Black, Fischer/Scholes, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, 81, 3/1973, S. 637ff.

Cox, John C./Ross, Stephan A./Rubinstein, Mark: Option Pricing: A simpliefied Approach, in: Journal of Financial Economics, 7/1979, S. 229ff.

Fend, Reinhold: Gewinnen mit Optionsstrategien. Erfolgreich in der Königsklasse des Terminhandels (Wiley trading), Weinheim, 20171.

Hull, John: Optionen, Futures und andere Derivate. Fachliche Betreuung der deutschen Übersetzung durch Dr. Wolfgang Mader und Dr. Marc Wagner , Hallbergmoos/Germany, 20159.

Labuszewski, John/Sinquefield, Jeanne C.: Inside the commodity option markets , New York, Chichester, 1985.

Natenberg, Sheldon: Option volatility and pricing. Advanced trading strategies and techniques , New York, NY, 20152.